Introduction au Traitement Numérique du Signal

Objectifs : présenter sans développement calculatoire lourd (pas de TF, pas de TZ) on donne des résultats on illustre. On donne des exemples sous Matlab en cours et on explique les calculs pour se préparer aux TP.

Mots clés: Fe, représentation en fréquence (limiter à série de Fourier sans les calculs de coefficients), shannon, sous-échantillonnage, Quantification, bruit de quantification, filtre linéaire, réponse impulsionnelle, produit de convolution, filtres et banc de filtres.

Introduction générale

http://www.univ-rouen.fr/psi/paquet

Traitement du Signal
Analyse spectrale

I. Propriétés des signaux analogiques sonores
- Evolution d'une grandeur physique au cours du temps
- Exemples acoustique
- Définition de quelques grandeurs : Amplitude, Puissance, Amplitude Efficace
- Introduction à l'analyse harmonique des signaux : série de Fourier
- Représentation en fréquence : spectres discrets

II. Signal numérique :
- Echantillonnage
- Quantification
- Théorème de Shannon et fréquence apparente d'un signal
- Sous échantillonnage et repliement de spectre
- Illustrations avec MatLab

III. Système linéaire numérique
- Transformation linéaire du signal
- Réponse impulsionnelle
- Produit de convolution
- Fonction de Transfert d'un système linéaire
- Illustrations avec MatLab

IV. Présentation de quelques effets sonores et filtres associés
- Illustration avec MatLab

V. Filtres généraux et leur représentation fréquentielle
- Passe bas – passe haut – passe bande – coupe bande
- Filtres miroirs
- Illustration avec MatLab

VI. Modèle du système auditif et application à la compression audio
- Sous-échantillonnage critique
- Banc de filtres

I. Propriétés des signaux analogiques sonores

1. **Phénomène acoustique**
   - Description d'un signal sonore
   - Mesure du signal sonore
   - Caractérisation d'un signal sonore
2. **Audition**
   - Spectre audible, Echelle d'amplitude,
   - Echelles de fréquence (Octave, Décade)
   - Perception du son, corrections sonométriques
3. **Le microphone, capteur de son**
   - Exemple: Microphone électrostatique
4. **Bruit et musique**
   - Construction d'une note musicale
   - Spectre de quelques instruments
   - Introduction à la synthèse de son par série de Fourier
   - Notion de bruit

I.1. Phénomène acoustique

1. Description d'un signal sonore

Un son est un ébranlement élastique de l'air, d'un fluide ou d'un solide qui se manifeste par des variations de pression autour de la pression moyenne du milieu.

Si le milieu est homogène l'onde sonore se propage à vitesse constante appelée célérité

P_m est la pression moyenne du milieu

c est la célérité du milieu

Milieu	Célérité c ($m.s^{-1}$)
Air sec à 20°	344
Eau à 20°	1500
Acier	5000
Diamant	18000

Unités de pression

Le Pascal (**Pa**) : 1 Pa=1 N / m^2 c'est le l'unité du Système International (SI)

1 bar = 10^5 Pa

1 atm = 101325 Pa

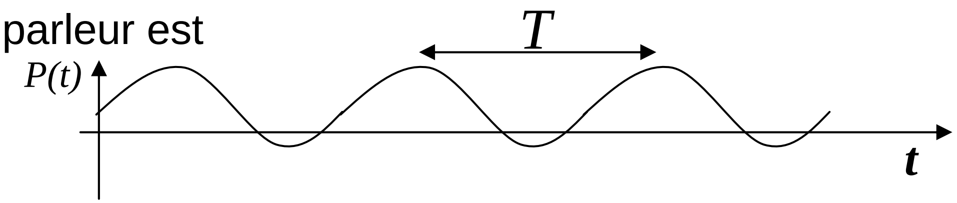
I.1. Phénomène acoustique

1. Description d'un signal sonore

Dans le cas d'un son purement sinusoïdal émis par le haut parleur

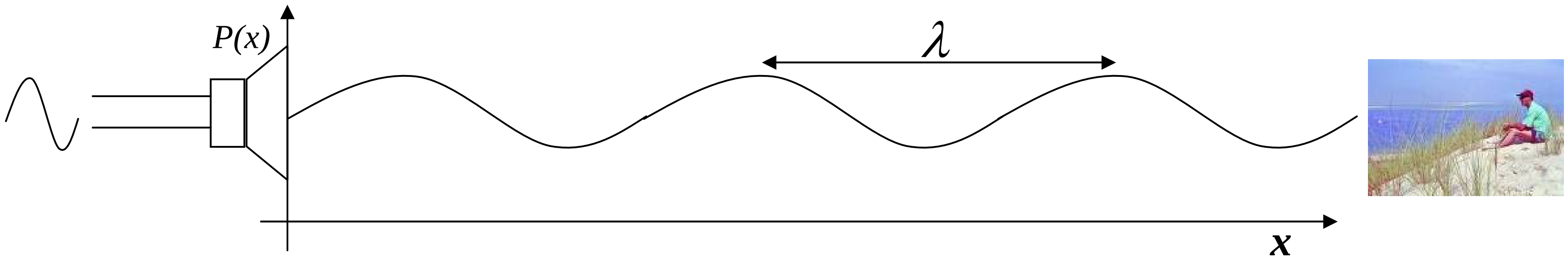
La pression à la position du haut parleur est

$$P(t) = P_m + p\sin(2\pi f t)$$



f est la fréquence

T=1 / f est la ***période temporelle***



L'onde sonore se propage jusqu'au récepteur à la vitesse c dans la direction x

Dans l'intervalle de temps T elle parcours la distance $\lambda = \mathbf{c}\mathrm{T}$

λ est la ***longueur d'onde*** de l'onde sonore, c'est la ***période spatiale***

I.1. Phénomène acoustique

2. Mesure du signal sonore

Niveau sonore

C'est une mesure relative de pression sonore P

Elle est comparée relativement à une pression sonore de référence qui est généralement le seuil de perception de l'audition humaine P_0

$$L = 20 Log_{10} \frac{P}{P_0}$$

en décibels (dB)

$$P_0 = 2.10^{-5} Pa$$

I.1. Phénomène acoustique

2. Mesure du signal sonore
Exemple de niveaux sonores

Pression acoustique Pa)	L (dB)	Intensité sonore ($W.m^{-2}$)	Situation	Sensation auditive
200	140	100	Seuil de douleur irréversible	Réacteur avion
20	120	1	Insupportable	Atelier
2	100	10^{-2}	Très fort	Marteau piqueur
2.10^{-1}	80	10^{-4}	Fort	Moteur d'auto
2.10^{-2}	60	10^{-6}	Niveau moyen	Magasin
2.10^{-3}	40	10^{-8}	Niveau faible	Intérieur maison
2.10^{-4}	20	10^{-10}	Très faible	Studio
2.10^{-5}	0	10^{-12}	Seuil d'audition	Non rencontré

I.2. Audition

3. Caractérisation d'un signal sonore

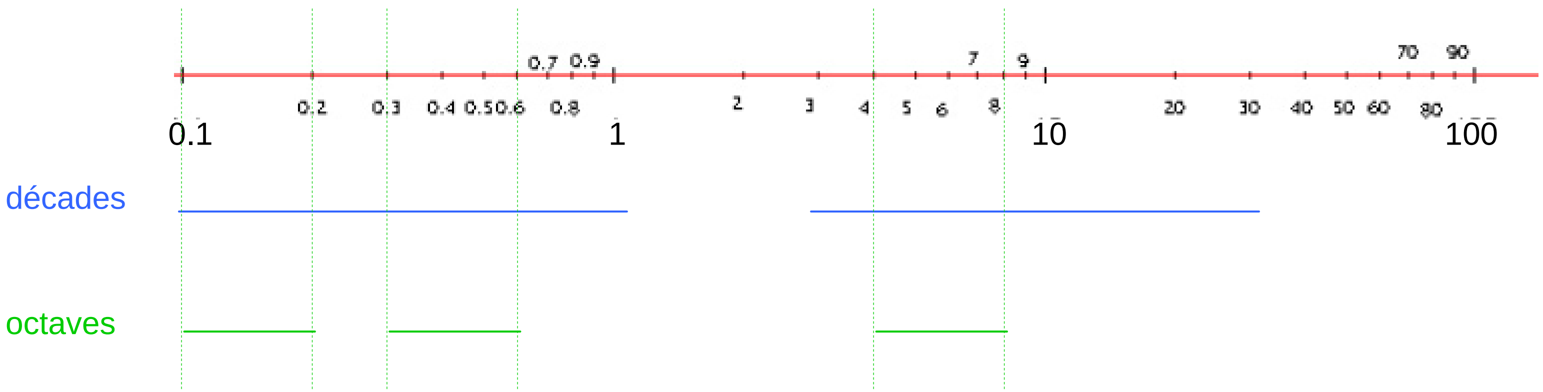
Un signal sonore est un signal perçu par l'oreille humaine

La gamme des sons audibles s'étend de ***22Hz*** à ***22KHz***

On utilise souvent une échelle logarithmique des fréquences

Une décade couvre l'intervalle des fréquences de ***f*** à ***10 f***

Une octave couvre l'intervalle des fréquences de ***f*** à ***2 f***



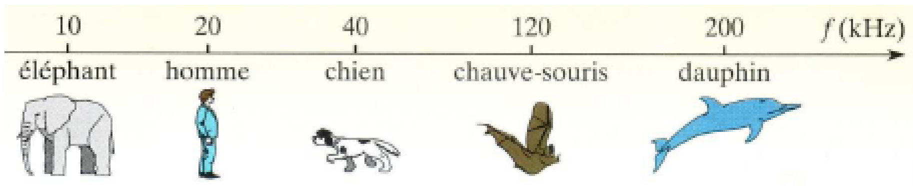
I.2. Audition

3. Caractérisation d'un signal sonore

La bande des fréquences audibles se décompose en 10 octaves

22Hz à *44Hz*
44Hz à *88Hz*
88Hz à *176Hz*
176Hz à *352Hz*
352Hz à *704Hz*
704Hz à *1408Hz*
1408Hz à *2816Hz*
2816Hz à *5632Hz*
5632Hz à *11264Hz*
11264Hz à *22528Hz*

Limite des fréquences audibles selon les espèces



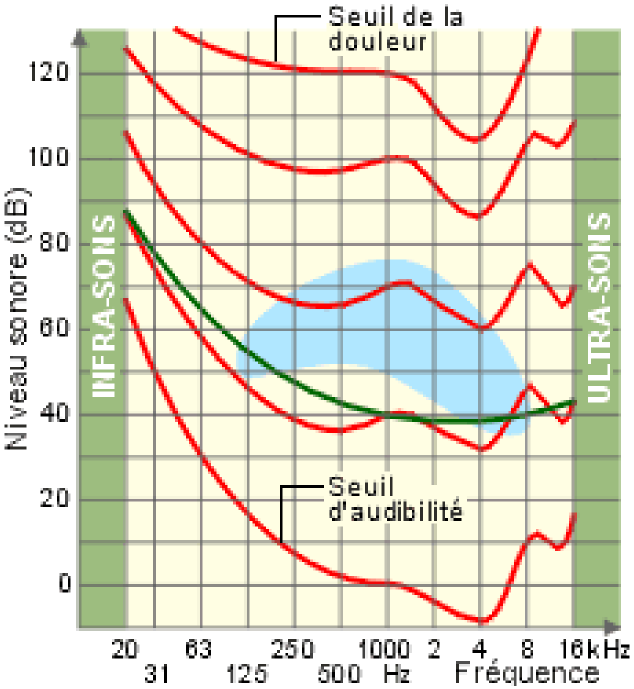
I.2. Audition

3. Caractérisation d'un signal sonore

Niveau sonore physiologique

Les courbes iso-niveau ne sont pas des horizontales

Les courbes iso-niveau ne sont pas parallèles entre elles



Les sons ne sont pas perçus de la même façon selon leur niveau et selon leur fréquence

Il faut corriger les mesures si on veut rendre compte de la perception humaine

I.2. Audition

3. Caractérisation d'un signal sonore
Les courbes de pondération sonométriques

Pour la mesure de bruits faibles on utilise la pondération A (mesures en dBA)
Pour les mesures de bruits moyens pondération B (mesures en dBB)
Pour les mesures de bruits forts pondération C (mesures en dBC)

On ajoute à la mesure la valeur indiquée dans la table de correction

$$L(f) = 20Log_{10}\frac{P(f)}{P_0(f)} + Pondération(A) \qquad (dBA)$$

$$L(f) = 20Log_{10}\frac{P(f)}{P_0(f)} + Pondération(B) \qquad (dBB)$$

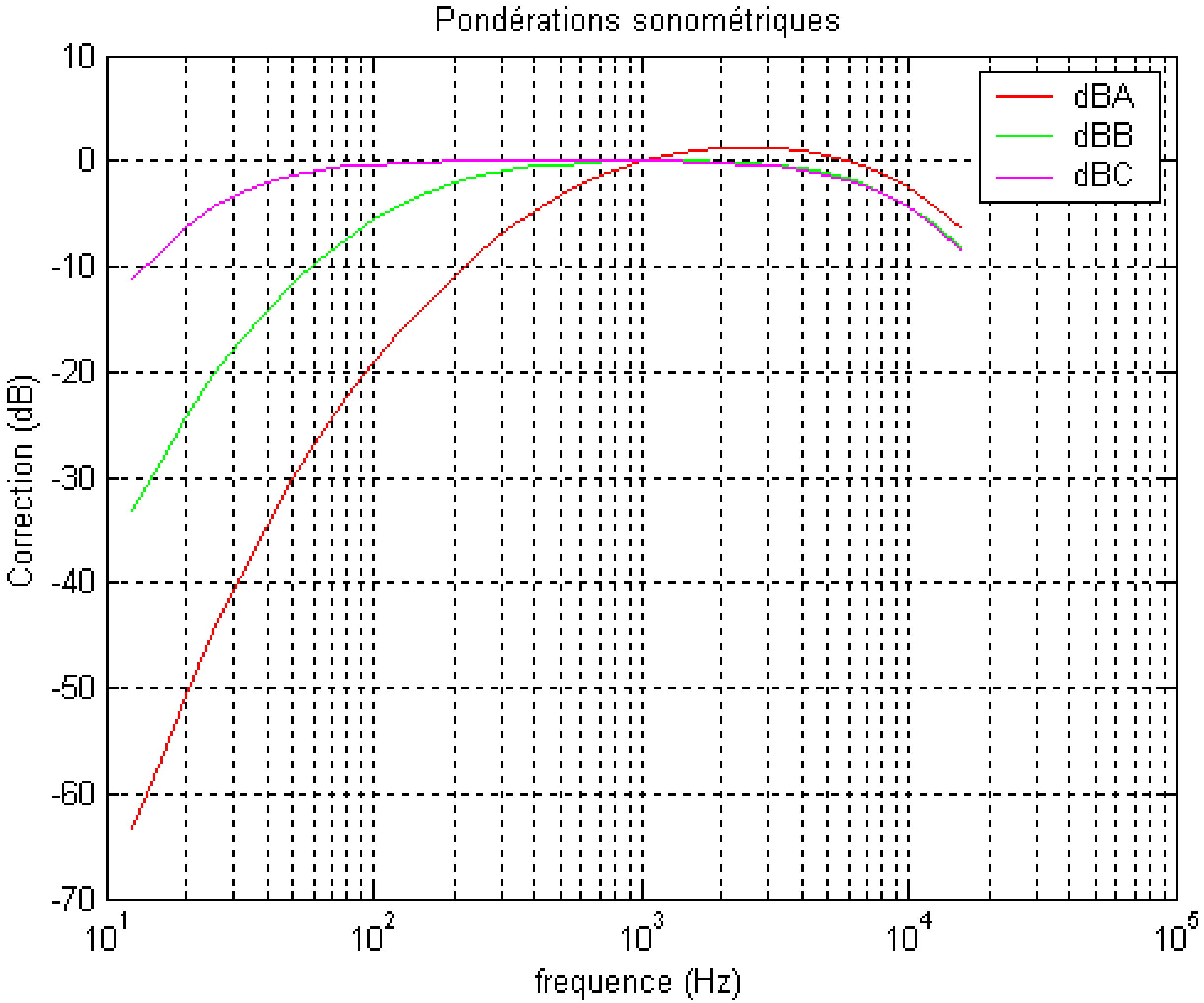
$$L(f) = 20Log_{10}\frac{P(f)}{P_0(f)} + Pondération(C) \qquad (dBC)$$

I.2. Audition

3. Caractérisation d’un signal sonore: Les courbes de pondération sonométriques

F (Hz)	A	B	C	F (Hz)	A	B	C
12.5	-63.4	-33.2	-11.2	500	-3.2	-0.3	0
16	**-56.7**	**-28.5**	**-8.5**	**630**	**-1.9**	**-0.1**	**0**
20	-50.7	-24.2	-6.2	800	-0.8	0	0
25	**-44.7**	**-20.4**	**-4.4**	**1000**	**0**	**0**	**0**
31.5	-39.4	-17.1	-3	1250	0.6	0	0
40	**-34.6**	**-14.2**	**-2**	**1600**	**1**	**0**	**-0.1**
50	-30.2	-11.6	-1.3	2000	1.2	-0.1	-0.2
63	**-26.2**	**-9.3**	**-0.8**	**2500**	**1.3**	**-0.2**	**-0.3**
80	-22.5	-7.4	-0.5	3150	1.2	-0.4	-0.5
100	**-19.1**	**-5.6**	**-0.3**	**4000**	**1**	**-0.7**	**-0.8**
125	-16.1	-4.2	-0.2	5000	0.5	-1.2	-1.3
160	**-13.4**	**-3**	**-0.1**	**6300**	**-0.1**	**-1.9**	**-2**
200	-10.9	-2	0	8000	-1.1	-2.9	-3
250	**-8.6**	**-1.3**	**0**	**10000**	**-2.5**	**-4.3**	**-4.4**
315	-6.6	-0.8	0	12500	-4.3	-6.1	-6.2
400	**-4.8**	**-0.5**	**0**	**16000**	**-6.6**	**-8.4**	**-8.5**

I.2. Audition



Pondérations sonométriques
dBA
dBB
dBC
Correction (dB)
frequence (Hz)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
10^1
10^2
10^3
10^4
10^5

I.3. Le microphone capteur de son

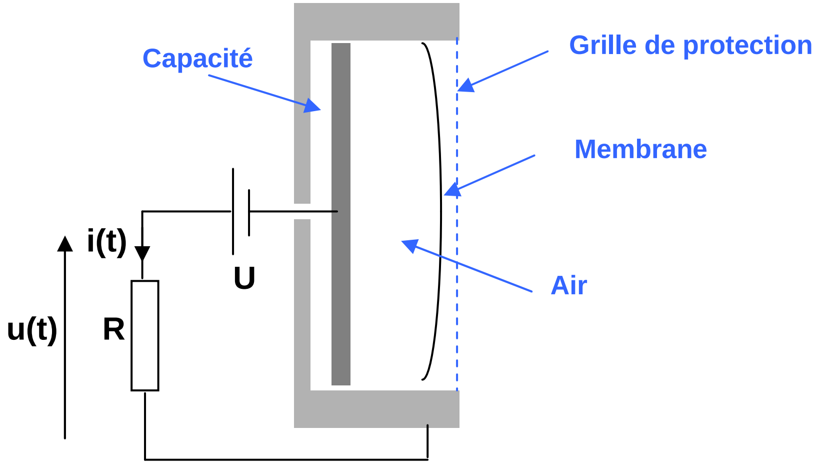
Exemple :le microphone électrostatique

Principe : l'onde sonore déforme une membrane qui entraine la variation de l'épaisseur de la capacité

$$i(t) = U\frac{dC}{dt}$$

$$\boxed{u(t) = RU\frac{dC}{dt}}$$

$$\boxed{C = \varepsilon\frac{S}{e}}$$



Pour avoir une bonne sensibilité il faut U et R grandes

car les variations de C sont faibles

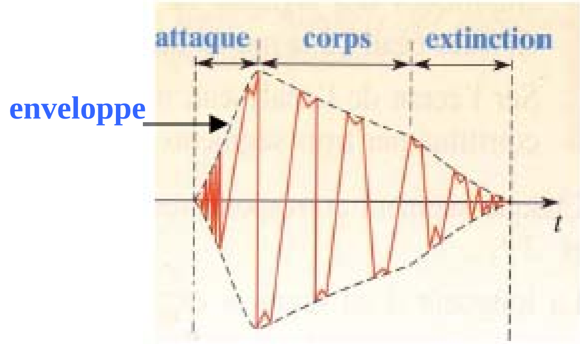
Le signal acoustique est transformé en un signal électrique

C'EST UN CAPTEUR

I.4. Bruit et musique

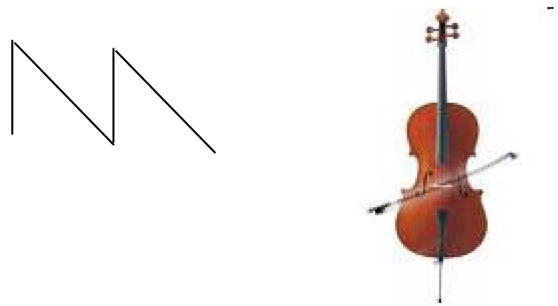
1. Allure temporelle d’une note musicale

- L’amplitude du son évolue dans l’enveloppe
- A l’intérieure de l’enveloppe le son évolue de façon périodique en fonction de la note jouée et de l’instrument utilisé
- L’enveloppe présente 3 phases successives qui sont plus ou moins longues en fonction de l’instrumentiste et de l’instrument



Durant le corps de la note, la formes d’onde périodique est caractéristique l’instrument

Forme d’onde en triangle: Flute



Forme d’onde en dents de scie: Violon

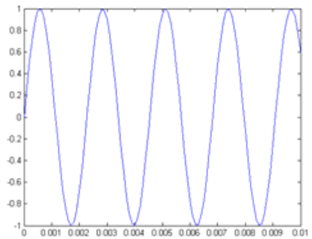
I.4. Bruit et musique

2. Hauteur et timbre

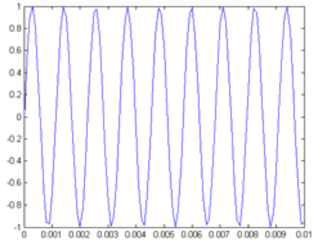
La hauteur d'une note de musique correspond à la fréquence de la forme d'onde

C'est le nombre de périodes de vibrations produites par l'instrument pendant une seconde. Elle est mesurée en Herz

Exemples : la note **La** pure à 440 Hz



la note **La** pure à 880 Hz



I.4. Bruit et musique

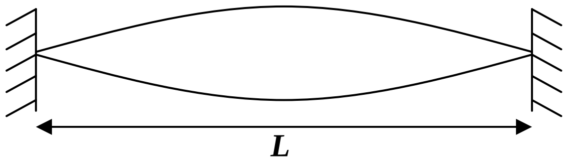
2. Hauteur et timbre

Le timbre d'une note de musique est caractérisée par la forme d'onde de l'instrument

La note d'un instrument n'est pas pure. Elle résulte d'une somme de sinusoïdes

Exemple de la corde vibrante:

Mode de résonance fondamental



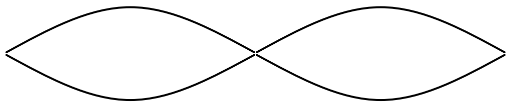
La fréquence fondamentale du son émis par la corde vaut

$$f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

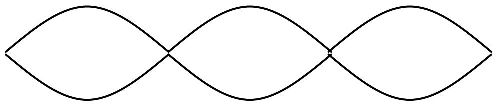
F est la tension de la corde

μ est la masse linéique de la corde

Mode de résonance harmoniques



$f_1 = 2 f_0$ première harmonique



$f_2 = 3 f_0$ deuxième harmonique

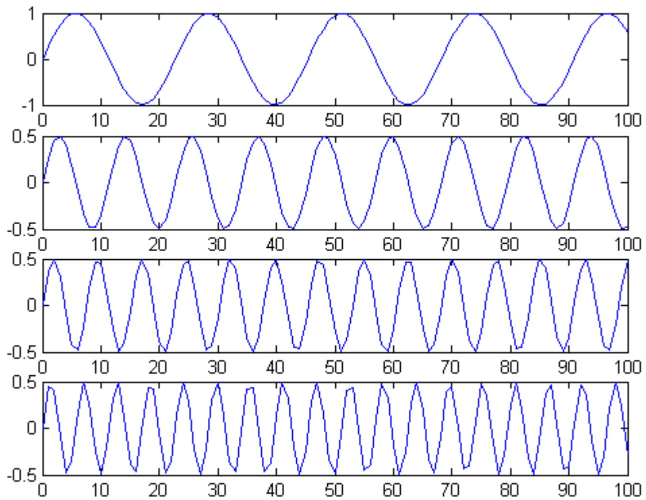
I.4. Bruit et musique

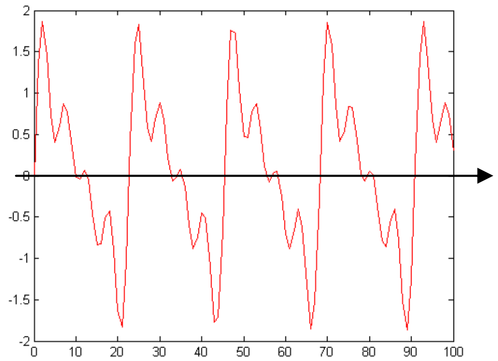
2. Hauteur et timbre

Exemple de la corde vibrante (suite):

Les modes de résonnance s’ajoutent pour former la forme d’onde

LA 440 Hz





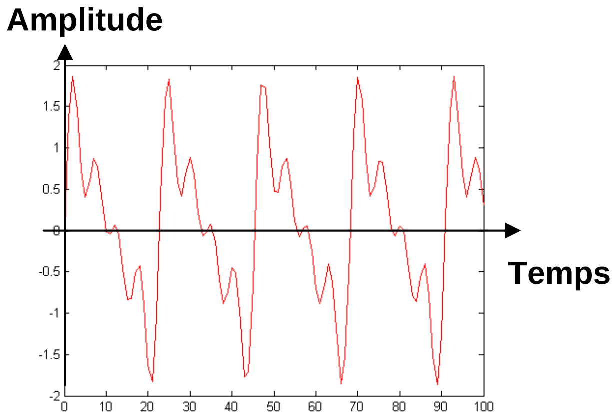
$$Onde = \sin(2\pi f_0\, t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_1\, t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_2\, t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_3\, t)$$

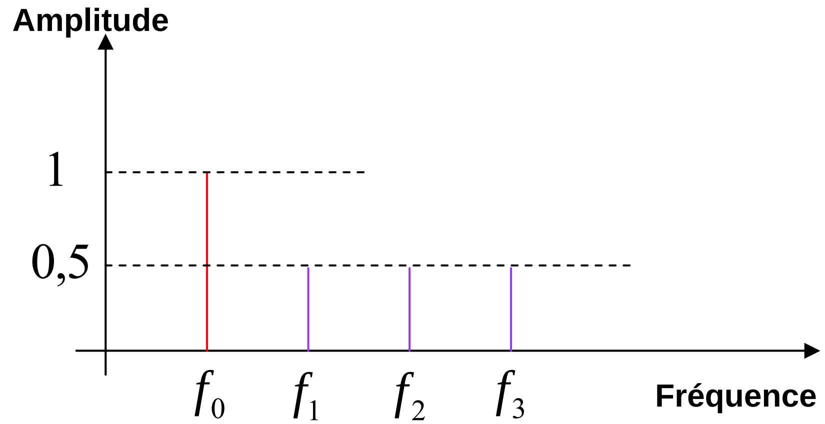
On obtient une forme d’onde en dents de scie:

2. Hauteur et timbre

Représentation fréquentielle de la forme d'onde

$$Onde = \sin(2\pi f_0\, t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_1\, t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_2\, t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi f_3\, t)$$





I.4. Bruit et musique

Joseph Fourier, 1768-1830

3. Introduction à l'analyse de Fourier

Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique $x_p(t)$ de période $T_o = \dfrac{1}{f_o}$

peut s'écrire $$x_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi \; nf_o t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi \; nf_o t)$$

Tout signal périodique de fréquence f_o est une somme d'harmoniques

I.4. Bruit et musique

3. Introduction à l'analyse de Fourier

… et on sait déterminer l'amplitude de chaque harmonique

$$a_o = \frac{1}{T_o}\int_0^{T_o} x_p(t)dt$$

Valeur moyenne sur une période

$$a_n = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} x_p(t)\cos(2\pi n f_o t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_o} x_p(t)\sin(2\pi n f_o t)dt$$

Le signal est projeté sur chaque signal harmonique

et on en calcul la moyenne sur une période

I.4. Bruit et musique

3. Introduction à la synthèse de Fourier

Décomposition en série de Fourier

Ecriture équivalente

$$x_p(t) = a_o + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \cos(2\pi \quad nf_o t + \varphi_n)$$

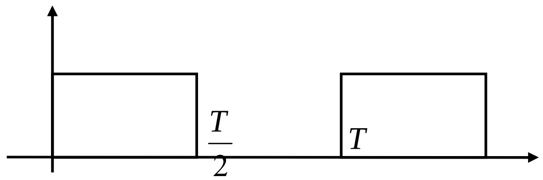
$$\varphi_n = Arctg(\frac{b_n}{a_n})$$

Grace à Fourier on trouve la décomposition harmonique du signal périodique

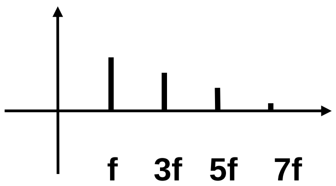
On fait l'analyse harmonique du signal

I.4. Bruit et musique

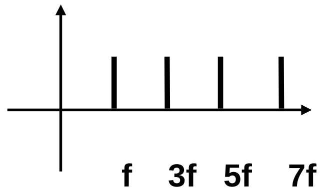
Exemple, cas d'un signal carré :



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

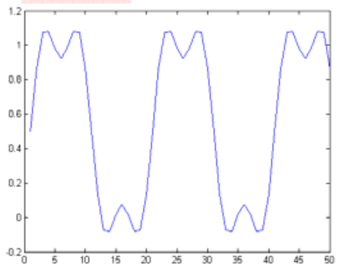


$$a_o = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0$$

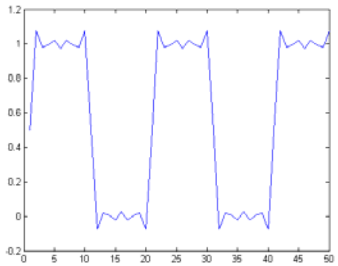
$$\varphi_n = Arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \quad si \quad n \quad impair \qquad b_n = 0 \quad \sin on$$

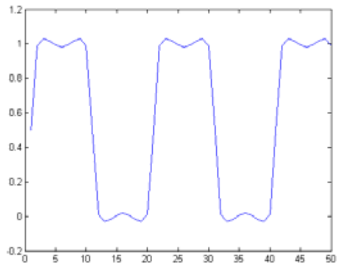
$n \leq 3$



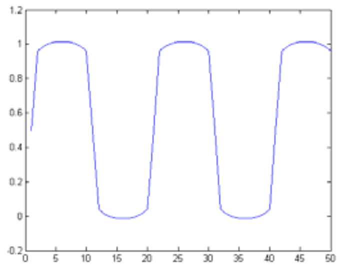
$n \leq 11$



$n \leq 15$



$n \leq 21$



I.4. Bruit et musique

4. Amplitude, Puissance d'un signal périodique

Pour un signal sinusoïdal $x_p(t) = A\sin(2\pi \quad f_o t)$

L'amplitude est A

Puissance d'une sinusoïde $P = \frac{A^2}{2}$

Amplitude Efficace d'une sinusoïde $A_{eff} = \sqrt{P} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

I.4. Bruit et musique

4. Amplitude, Puissance d'un signal périodique

Amplitude d'un signal périodique quelconque $x_p(t)$

Puissance d'un signal périodique

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T x_p^2(t)dt$$

Somme des puissance de chaque harmonique

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

Amplitude Efficace

$$A_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} P_n}$$

$$A_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} A_{eff}(n)^2}$$

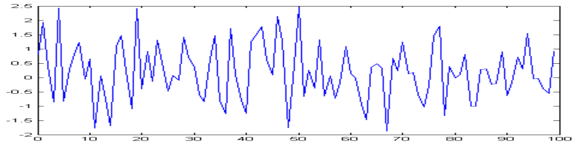
$A_{eff}(n)$ est l'amplitude efficace de l'harmonique n

P_n est la puissance de l'harmonique n

I.4. Bruit et musique

5. Notion de bruit

Un bruit est un ensemble de son ayant un caractère aléatoire non structuré qui ne véhicule pas d'information.

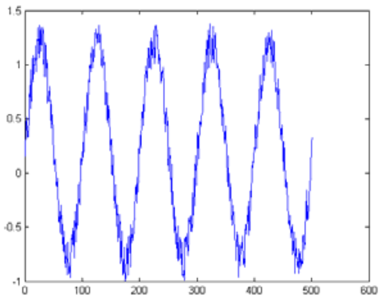


Un signal est porteur d'une information structurée ayant une certaine organisation. L'identification de cette structure par l'homme lui permet de comprendre le message

Exemple

signal de parole, signal sismique, echo radar, signal musical….

Dans la pratique, il y a toujours la présence d'un bruit
- du fait du milieu ambiant qui perturbe le signal
- du fait des erreurs de calcul



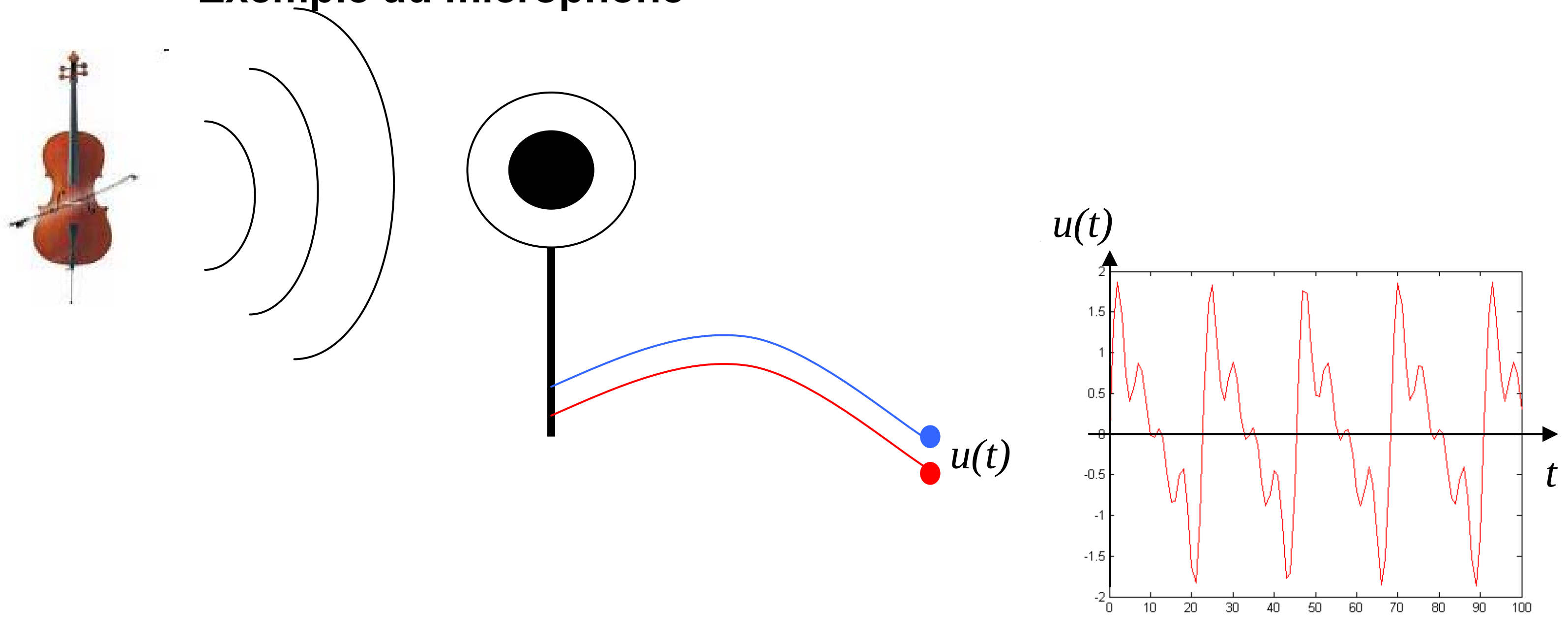
II. Signal numérique

1. Signal Analogique
2. Echantillonnage
   1. Fréquence normalisée, Fréquence apparente d’un signal numérique
   2. Sous échantillonnage et fréquence apparente
   3. Théorème de Shannon
   4. Illustration avec MatLab
3. Quantification
4. Signal numérique
5. Synthèse d’un signal numérique avec MatLab
6. Définition de la transformée en Z

II.1 Signal analogique

1. **Signal analogique ou continu**
   - Il représente l'évolution d'une grandeur physique
   - Souvent transformée en une tension électrique ***u(t)*** à la sortie d'un capteur
   - Il est défini **à tout instant t**
   - ***u(t)* est une fonction continue de *t***

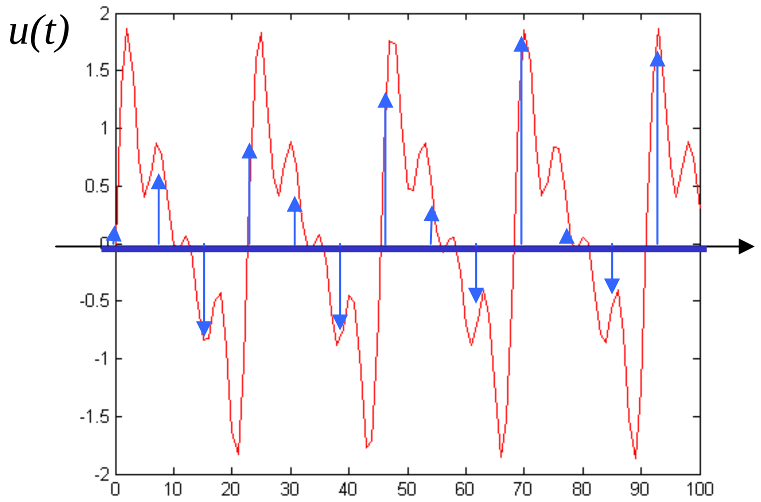
   Exemple du microphone

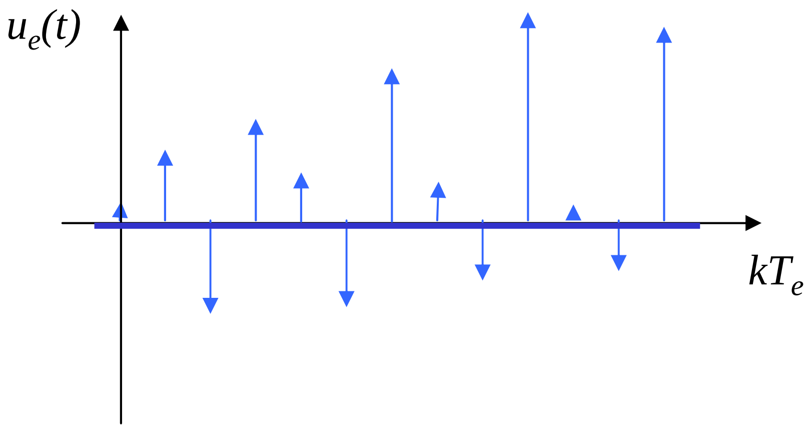


II.2 Echantillonnage

1. Echantillonnage

- On prélève sur le signal continu des échantillons
- Les prélèvements sont réalisés régulièrement au cours du temps à la période T_e
- Chaque prélèvement correspond à une prise de mesure (mesure de tension aux bornes du capteur)
- T_e est la période d'échantillonnage



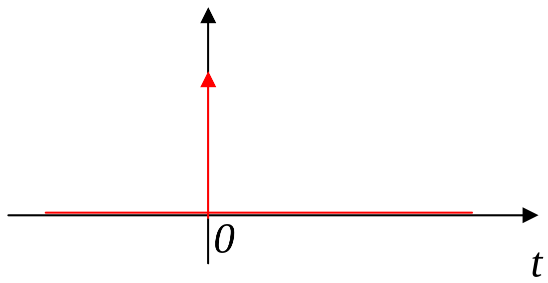


- **L'échantillonnage provoque une perte d'information**

II.1 Echantillonnage

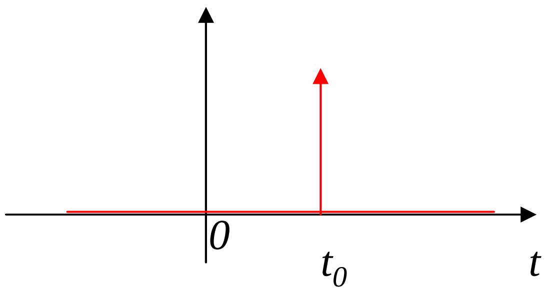
2. Représentation mathématique d'un signal échantillonné

- L'impulsion de Dirac $\delta(t)$

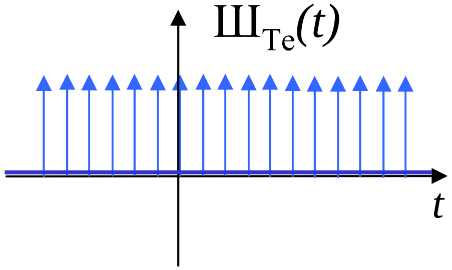


C'est l'impulsion de largeur infiniment petite

- L'impulsion de Dirac retardée de t_0 $\delta(t - t_0)$



- Train d'impulsions ou ''peigne'' de Dirac



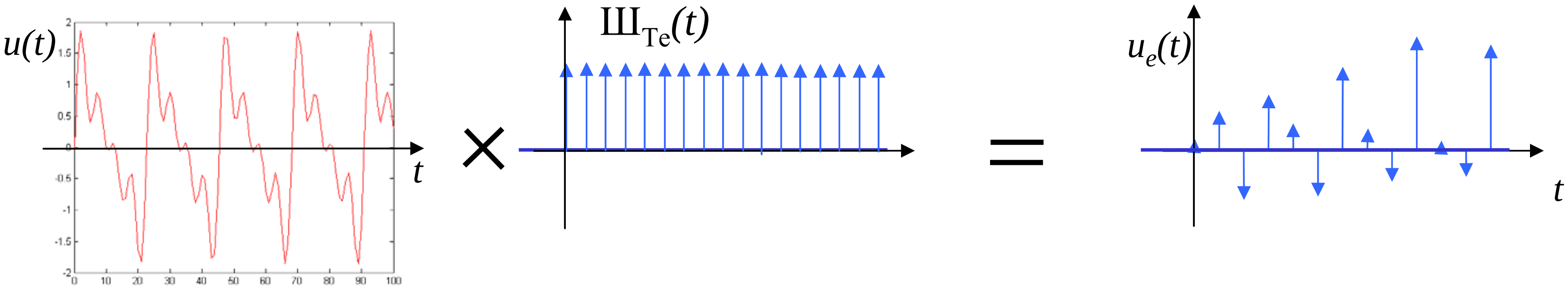
$$Ш_{Te}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

se prononce « **cha** »

II.1 Echantillonnage

2. Représentation mathématique d'un signal échantillonné

Le signal échantillonné peut s'écrire



$$u_e(t) = u(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$u_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(t)\delta(t - kT_e)$$

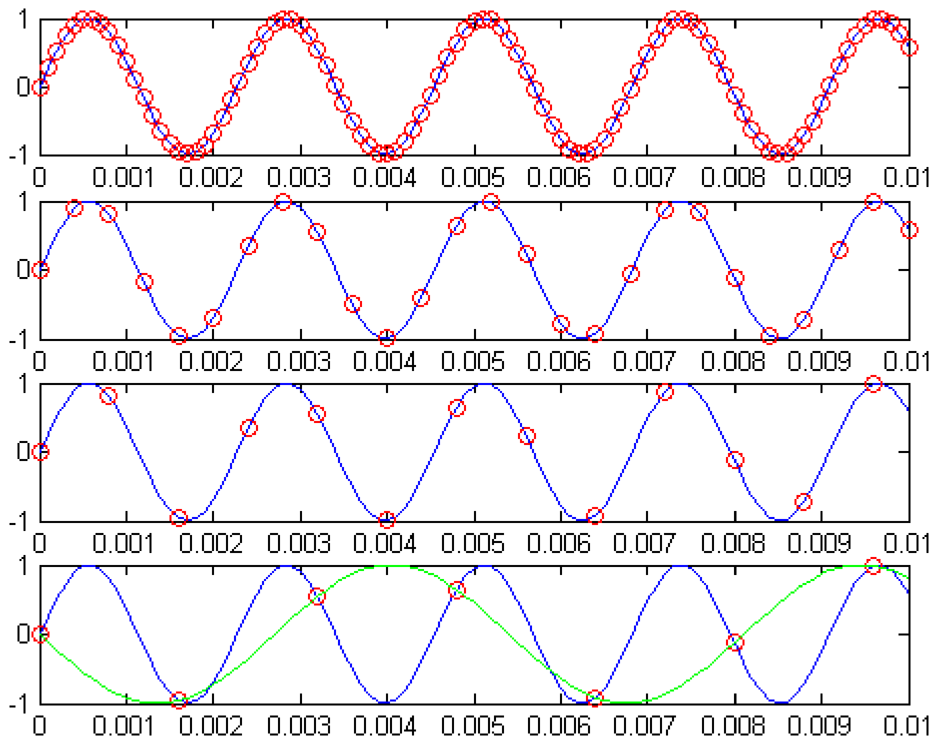
C'est une somme d'impulsions pondérées
Il est non nul aux instants d'échantillonnage uniquement

II.1 Echantillonnage

3. Fréquence apparente d'un signal échantillonné

Echantillonnage du La-440

Remarque:
Pour l'affichage on remplace les impulsions par des o



$f_e = 10KHz$

$f_e = 2500Hz$

$f_e = 1250Hz$

$f_e = 625Hz$

$\boxed{f_{apparente} = 185Hz}$

II.1 Echantillonnage

3. Fréquence apparente d'un signal échantillonné

si $f \leq \frac{f_e}{2}$ la perception du signal n'est pas altérée, **alors** $f_{apparente} = f$

si $f > \frac{f_e}{2}$ le signal est perçu à une fréquence inférieure, **alors** $f_{apparente} = f_e - f$

Dans l'exemple précédent on a:

$$f_{apparente} = 625 - 440 = 185Hz$$

Analogie avec l'effet stroboscopique

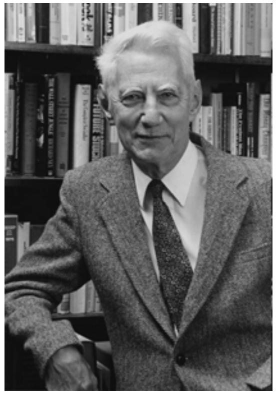
II.1 Echantillonnage

4. Reconstruction du signal analogique : Théorème de Shannon

L'expérience précédente montre que l'on ne perd pas d'information en échantillonnant le signal si

$$f_e = 2 \times f_{signal}$$

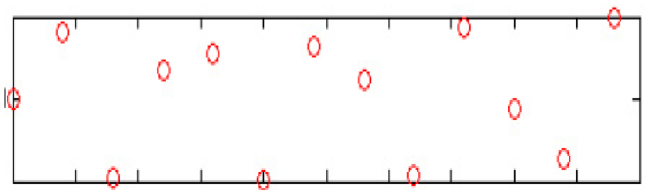
C'est la condition d'échantillonnage de Shannon

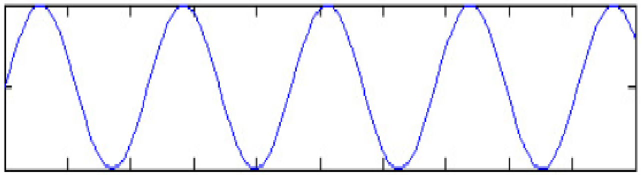


Claude Elwood Shannon
(30 avril 1916 - 24 février 2001)

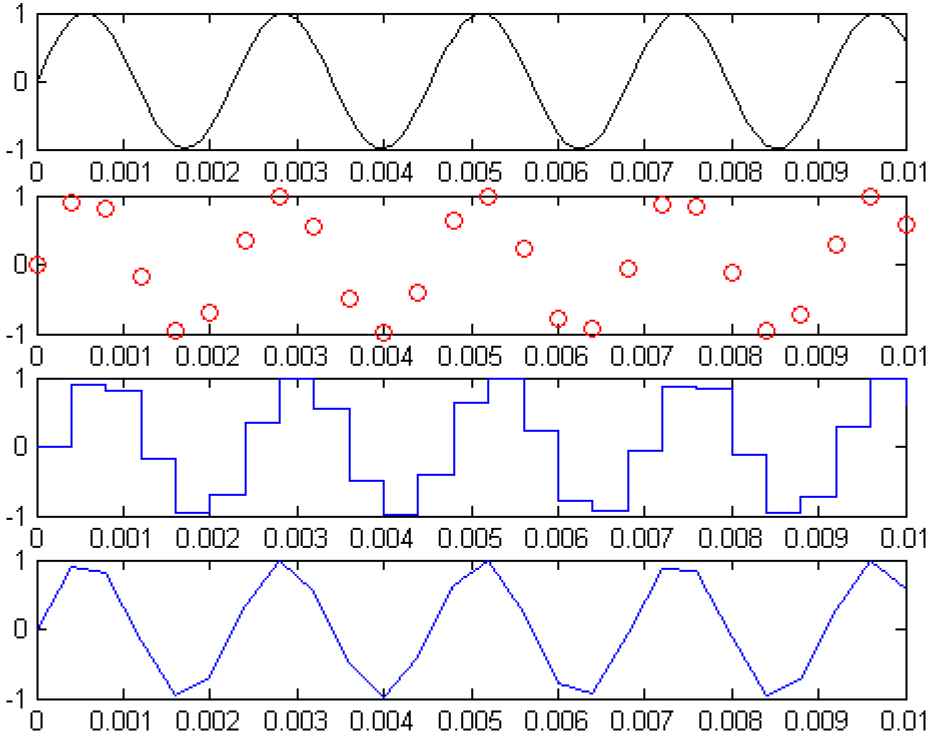
Shannon montre que dans ce cas on peut reconstruire en théorie le signal analogique à partir des échantillons

Il existe dans ce cas un **interpolateur idéal**





4. Reconstruction du signal analogique



Signal analogique

Signal échantillonné

Interpolateur d'ordre 0
Maintient la valeur constante entre 2 échantillons successifs

Interpolateur d'ordre 1
Interpole par le segment de droite qui relie 2 échantillons successifs

On **s'approche** de l'**interpolateur idéal !!**

II.1 Echantillonnage

5. Fréquence normalisée d'un signal échantillonné

$$\upsilon = \frac{f}{f_e}$$ sans unité

Condition de Shannon

Si $\upsilon \leq 0.5$ **alors** la condition de Shannon est vérifiée

Si $\upsilon > 0.5$ **alors** l'échantillonnage ne préserve par l'informationl

TP Séance 1

Exercice 1: synthèse d'un signal par série de Fourier

$$a_o = \frac{1}{2} \qquad a_n = 0 \qquad b_n = \frac{2}{n\pi} \quad si \quad n \quad impair \qquad b_n = 0 \quad \sin on$$

```
%
% Synthèse d'un signal carré par série de Fourier
%
fo = 5;
Fe= 100;
Te = 1/Fe;
N = 50;
k=[0:N-1]

% la composante continue
signal  = ones(1,N) * 0.5;

plot(signal);
pause;

NHarmoniques = 21;

for n=1:2:NHarmoniques,     % les valeurs impaires
    % on ajoute une harmonique à chaque fois
    signal = signal + (sin(2*pi*n*fo * k*Te) * 2/pi/n);
    plot(signal);
    pause;
 end;
```

TP Séance 1

Exercice 2: Echantillonnage et fréquence apparente d'un signal

On étudie l'échantillonnage d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0 et d'amplitude 1

On l'échantillonne à la fréquence f_e = 10 000 Hz

Pour chacune des valeur de f_0 ci-dessous

100, 1000, 3000, 5000, 8000, 10 100, 11 000, 13 000, 15 000, 18 000, 20 100

1- calculer les N=10 000 premiers échantillons du signal et les placer dans le tableau que l'on désignera 'signal'

2- Tracer à l'écran les M=100 premiers échantillons

3- Noter la période apparente du signal (en nombre d'échantillons), la comparer à la valeur théorique

4- Ecouter le signal avec la fonction `sound(signal, Fe);`

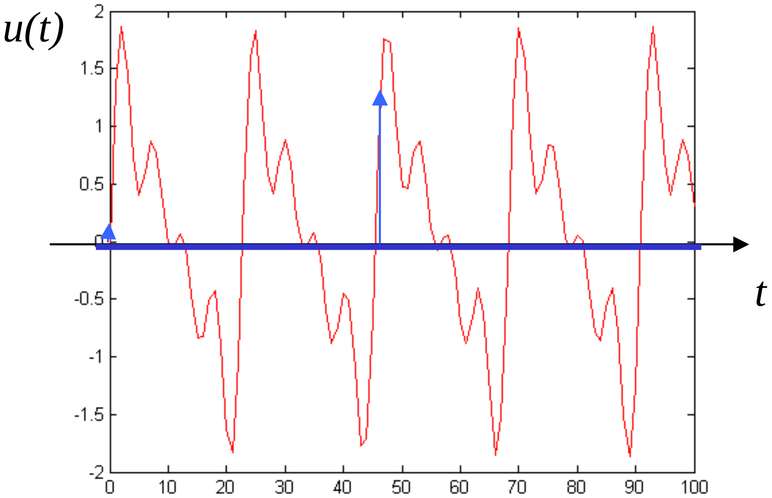
5- Comparer les observations visuelles et sonores

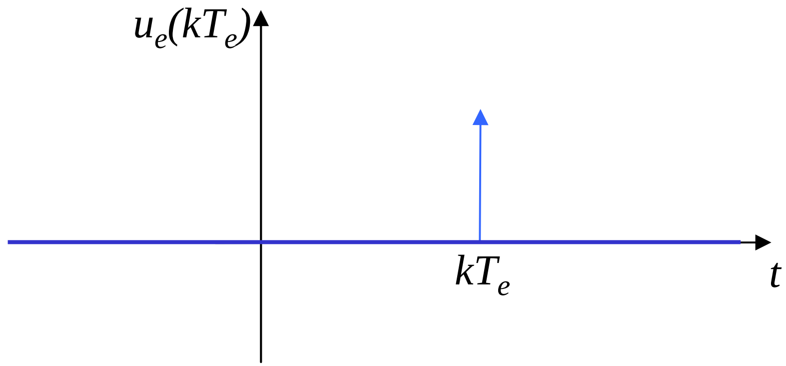
7- Pour quelles valeur de f_0 la condition de Shannon est-elle vérifiée?

8- Comparer les fréquences apparentes lorsque la condition de Shannon n'est pas vérifiée
Indiquer avec quelle périodicité apparait le phénomène de fréquence apparente et comparer à la valeur prévue

II.2 Quantification

L'échantillon prélevé à l'instant kT_e doit être converti en un nombre
Car la machine ne sait manipuler que des nombres



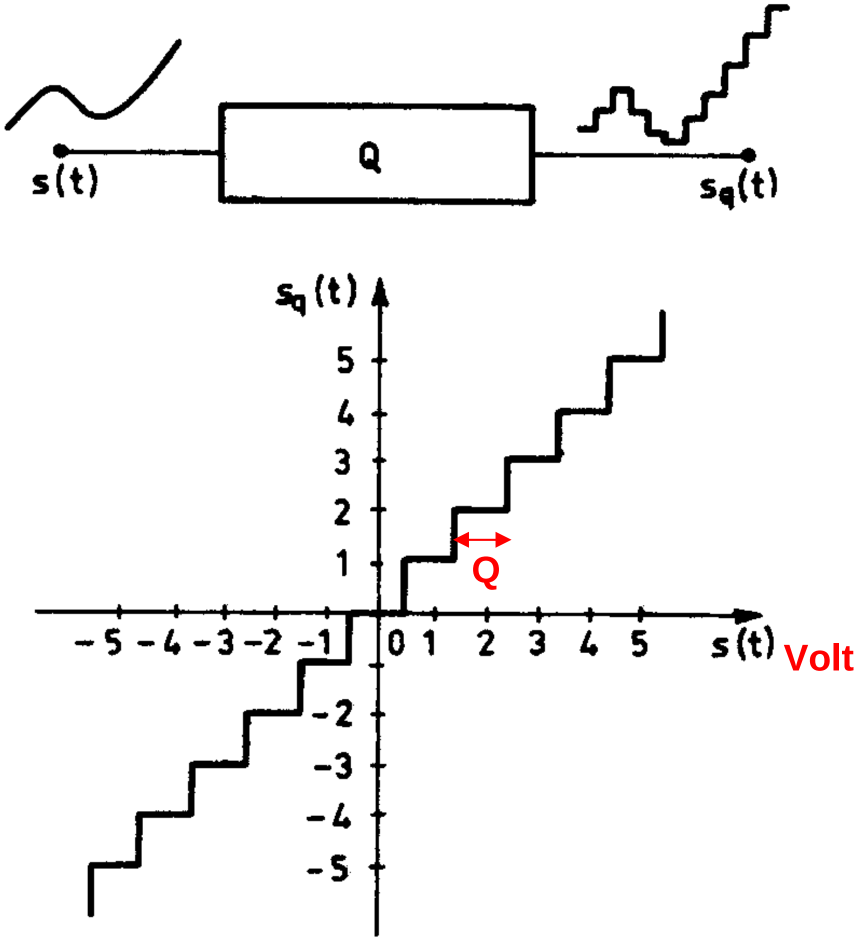


Chaque impulsion a la valeur d'une tension (le plus souvent)
On doit donc transformer une valeur de tension en un nombre

On utilise un quantificateur

II.2 Quantification

1. Loi d'entré / sortie d'un quantificateur



$$s_q(t) = arrondi\left(\frac{s(t)}{Q}\right)$$

Q: pas de quantification (Volt)

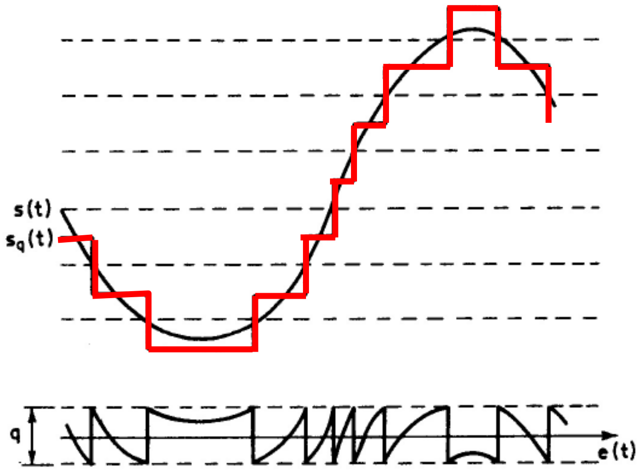
$s_q(t)$ est entier

II.2 Quantification

2. Erreur de quantification

Pour chaque mesure, le quantificateur en arrondissant à la valeur entière la plus proche fait une erreur

il y a donc une erreur entre le signal d'entrée et le signal de sortie du quantificateur



$$s(t) = s_q(t) + e(t)$$

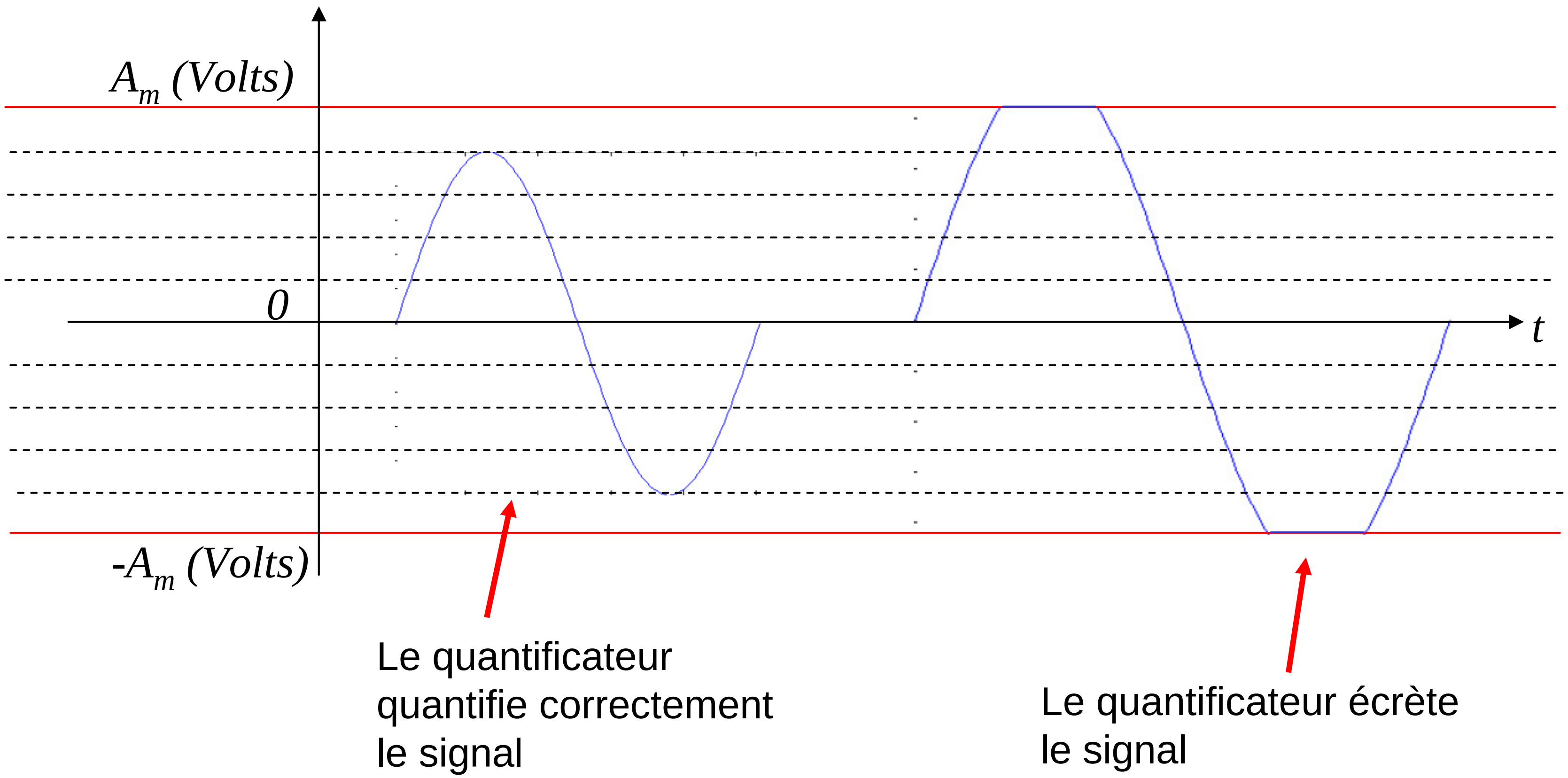
$e(t)$

e(t) est le signal d'erreur du quantificateur

II.2 Quantification

2. Plage de conversion du quantificateur

Le quantificateur fonctionne correctement tant que l'amplitude du signal d'entrée est dans la plage $[-A_m, A_m]$



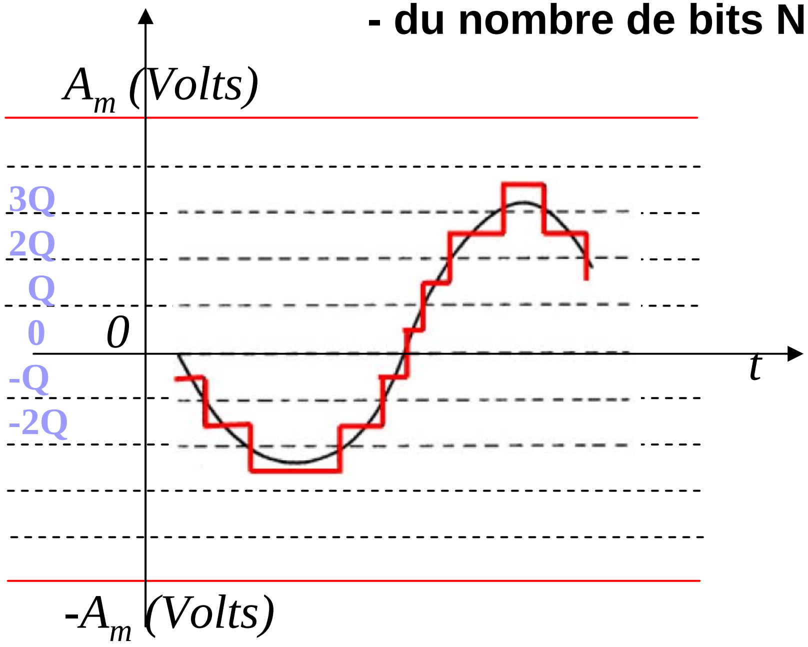
II.2 Quantification

3. Précision du quantificateur

Elle est définie par le pas de quantification: Q doit être faible

Elle dépend de : - la plage de conversion $[-A_m, A_m]$

- du nombre de bits N utilisés pour coder l'amplitude quantifiée



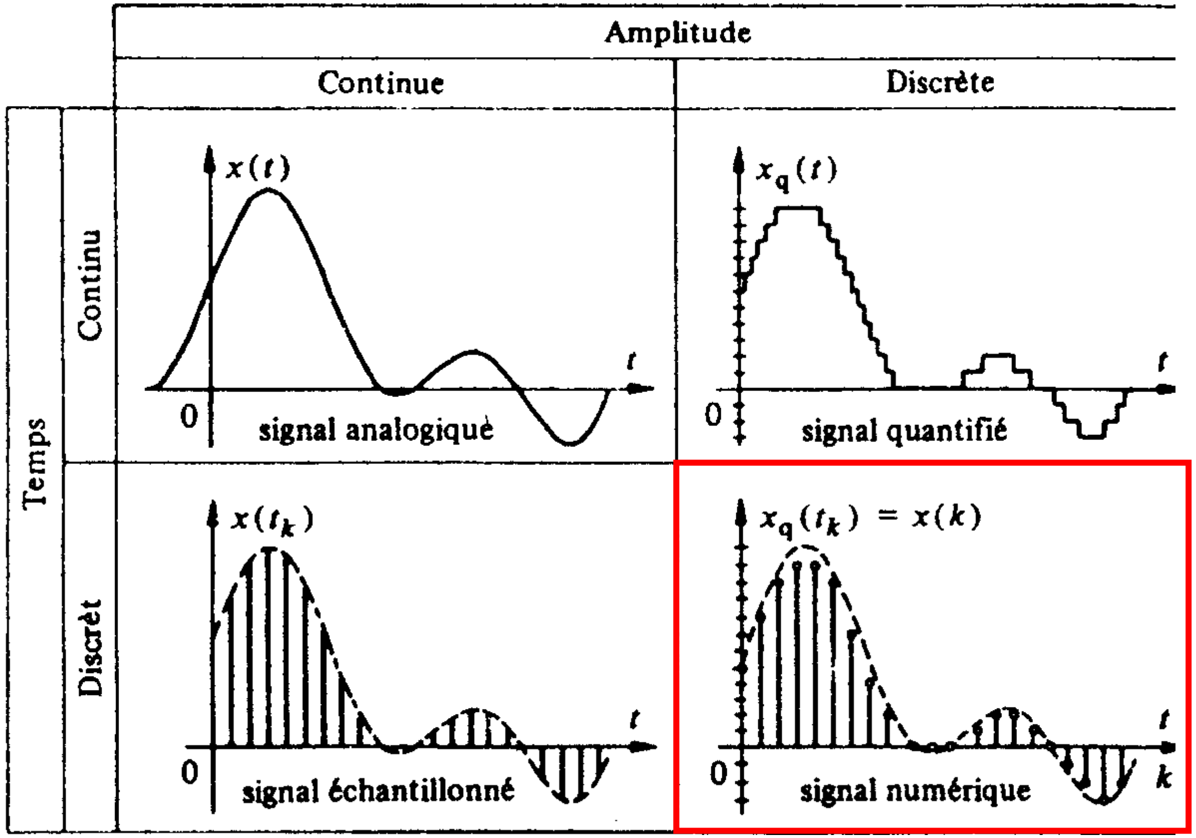
$$Q = \frac{A_m}{2^{N-1}}$$

La précision augmente quand N augmente

La puissance moyenne du signal d'erreur s'écrit $P_e = \frac{Q^2}{12}$

II.3 Signal numérique

Un signal numérique est le résultat de l'échantillonnage temporel et de la quantification de l'amplitude d'un signal analogie

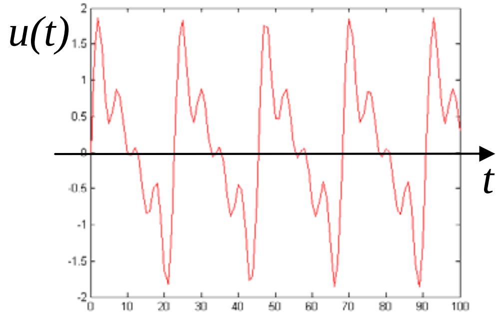


$$x_n(k) = arrondi\ \left(\frac{x(kT_e)}{q}\right)$$

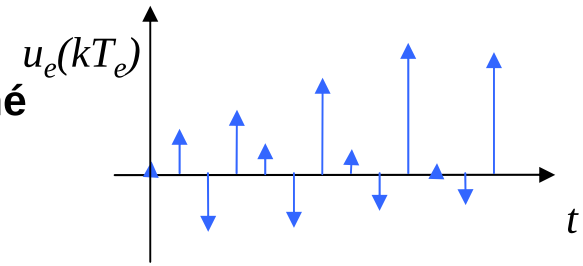
II.3 Signal numérique

Représentation graphique d'un signal numérique

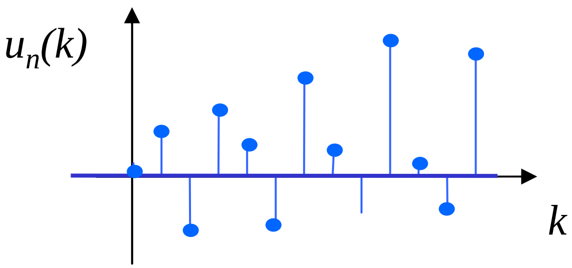
Signal analogique



Signal échantillonné



Signal numérique

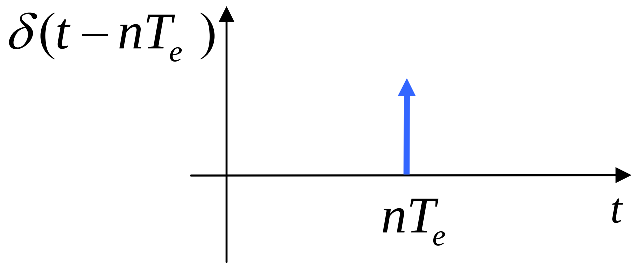


II.3 Signal numérique

Notion de Transformée en Z d'un signal numérique

En analogique

Grace à l'impulsion de Dirac on précise l'instant où se produit l'impulsion

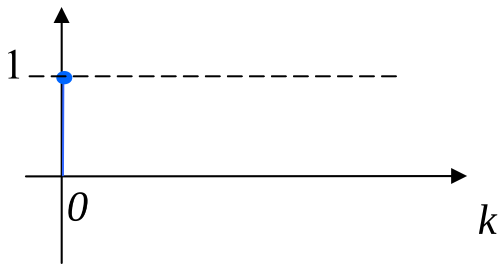


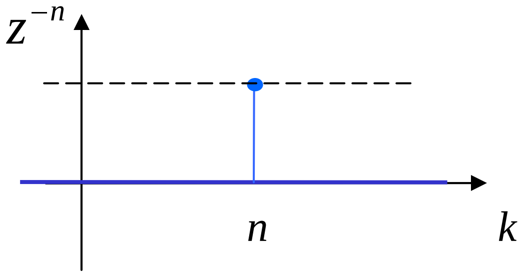
Impulsion en l'instant 0

Impulsion retardée de n échantillons

En numérique

On veut préciser à quel instant se produit chaque valeur numérique





1 à l'instant 0

1 retardé de n échantillons

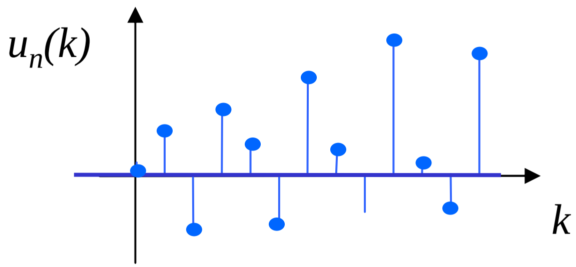
II.3 Signal numérique

Notion de Transformée en Z d'un signal numérique

Multiplier un échantillon numérique par la variable z^{-n} c'est le retarder de n échantillons par rapport à l'origine

Le multiplier par z^{n} c'est l'avancer de n échantillons

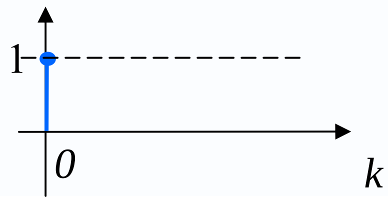
On peut alors exprimer le signal numérique en utilisant l'opérateur retard numérique : c'est la transformée en Z du signal numérique



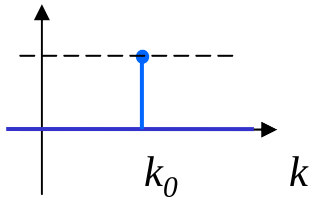
$$U_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_n(k) z^{-k}$$

II.3 Signal numérique

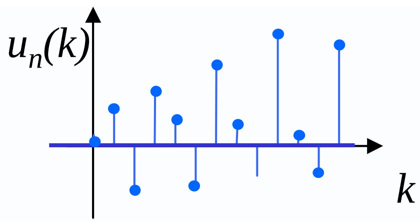
Représentation dans le temps | **Représentation en Z**



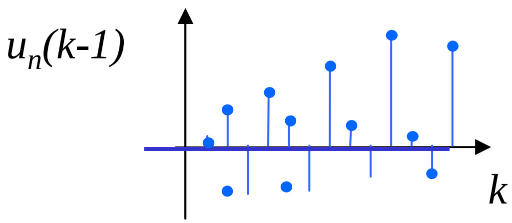
$$1$$



$$z^{-k_0}$$



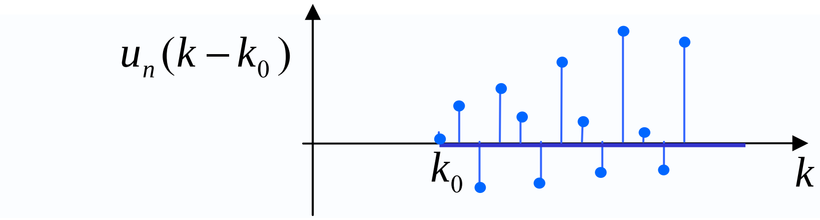
$$U_n(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_n(k) z^{-k}$$

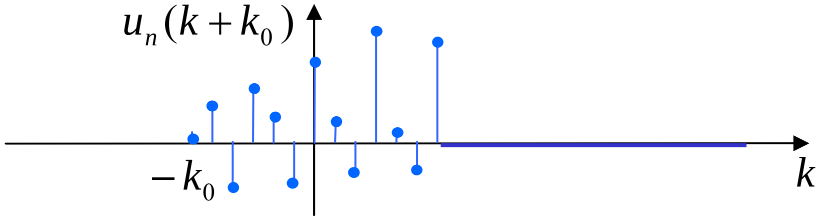


$$U_n(z) z^{-1}$$

II.3 Signal numérique

Représentation dans le temps





Représentation en Z

$$U_n(z)z^{-k_0}$$

$$U_n(z)z^{k_0}$$

TP Séance 2

Exercice 1: Quantification du signal

Réaliser un quantificateur sur N bits qui quantifie un signal sinusoïdal de fréquence normalisée $\nu_0 = 0.1$

Amplitude = 1
Am = 2

Donner à N les valeurs 16 12 8 4 2 1

Calculer le signal d'erreur et le visualiser

Calculer la puissance moyenne du signal d'erreur sur une période dans chaque cas

TP Séance 2

Exercice 2: Opérateur retard – Filtre en peigne

Réaliser un programme MatLab qui effectue l'opération suivante sur les échantillons

$$y(k) = x(k) + x(k-D)$$

x est un signal sinusoïdal de fréquence variable Fo
On choisit Fe = 10KHz
On choisit D = 10

Ecouter le signal y et le visualiser graphiquement quand Fo prend les valeurs suivantes:
100, 200, 300, 500, 700, 900 , 1100 1200, 1300, 1500, 1700, 1900, 2100

Calculer la puissance moyenne du signal y pour chaque valeur de D,

On rappelle la formule trigonométrique suivante : $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$

Justifier vos observations à l'aide de cette formule

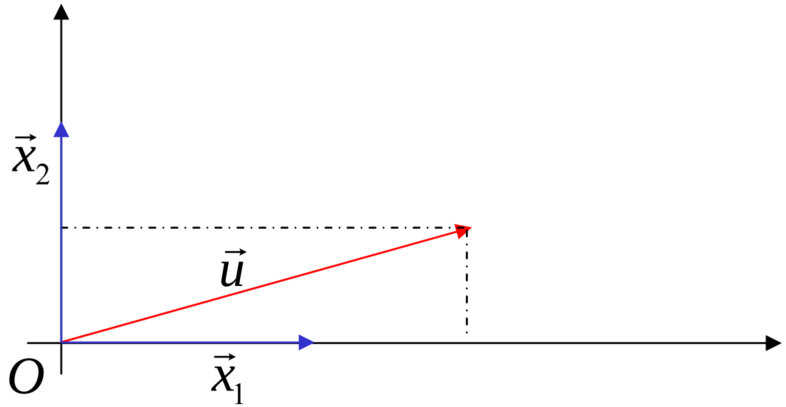
Comment s'écrit la transformée en Z du signal y?

III. Systèmes linéaires numériques

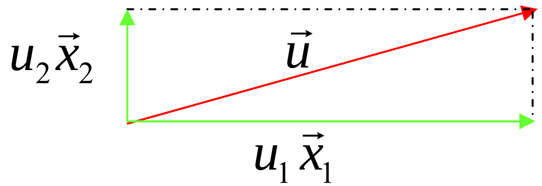
1. Rappel de calcul vectoriel, produit scalaire
2. Transformation linéaire d'un signal numérique
3. Système linéaire
4. Réponse impulsionnelle d'un SL
5. Produit de convolution
6. Fonction de Transfert d'un système linéaire
7. Illustrations avec MatLab

3.1. Rappel de calcul vectoriel

Exemple en dimension 2 Soit $(O, \vec{x}, \vec{y})$ un repère orthonormé du plan



Tout vecteur $\vec{u}$ du plan s'écrit $\vec{u} = u_1\vec{x}_1 + u_2\vec{x}_2$



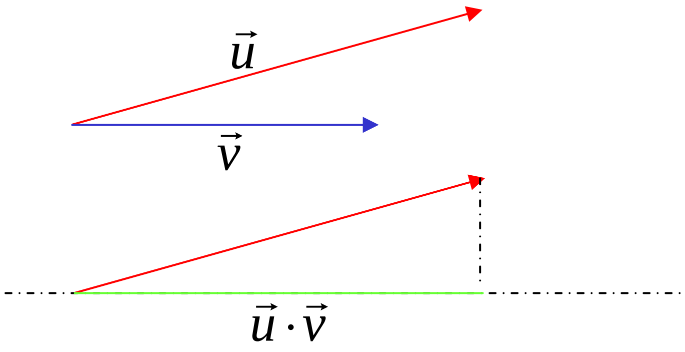
u_1 et u_2 sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

3.1. Rappel de calcul vectoriel

Exemple en dimension 2: produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$



C'est la **projection orthogonale** d'un vecteur sur l'autre

Ecriture du produit scalaire dans le repère orthonormé

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2$$

3.1. Rappel de calcul vectoriel

Produit scalaire en dimension K

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_K \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_K \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + \dots + u_K \times v_K$$

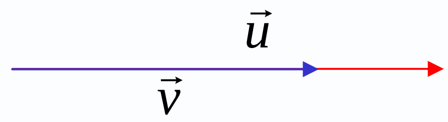
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{K} u_i \times v_i$$

3.1. Rappel de calcul vectoriel

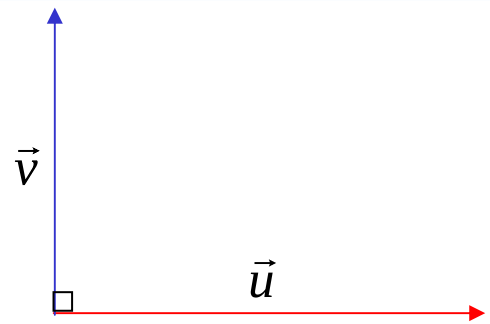
Propriétés du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

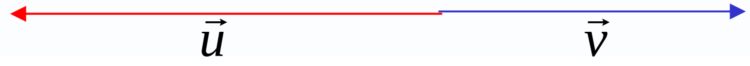
- Le produit scalaire est **maximum** si les vecteurs sont colinéaires et de même orientation



- Le produit scalaire est **nul** si les vecteurs sont orthogonaux



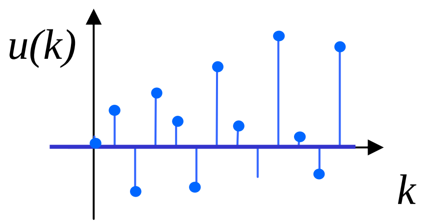
- Le produit scalaire est **minimum** si les vecteurs sont colinéaires et d'orientations opposées



3.2. Représentation vectorielle d'un signal numérique

Un signal numérique de durée N échantillons est représenté par un vecteur de dimension N

Représentation temporelle



Représentation vectorielle

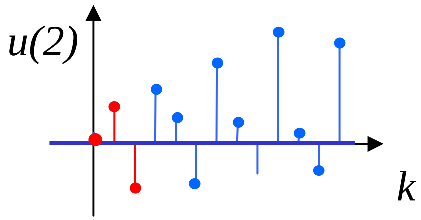
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u(N-1) \\ u(N-2) \\ \ldots \\ u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

3.3. Représentation vectorielle à court terme d’ordre K

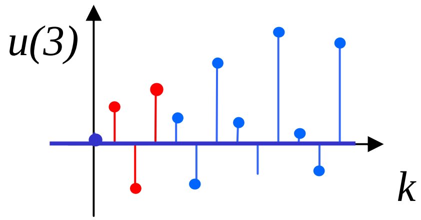
On obtient une représentation vectorielle à court terme d’ordre K en ne retenant que les K derniers échantillons sur le signal que l’on place dans un vecteur de dimension K

Représentation temporelle

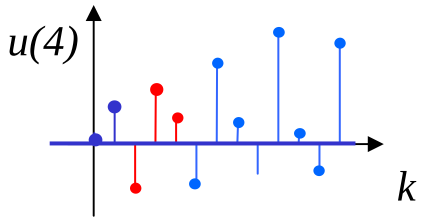
Représentation vectorielle



$$\vec{u}(2) = \begin{pmatrix} u(2) \\ u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$



$$\vec{u}(3) = \begin{pmatrix} u(3) \\ u(2) \\ u(1) \end{pmatrix}$$

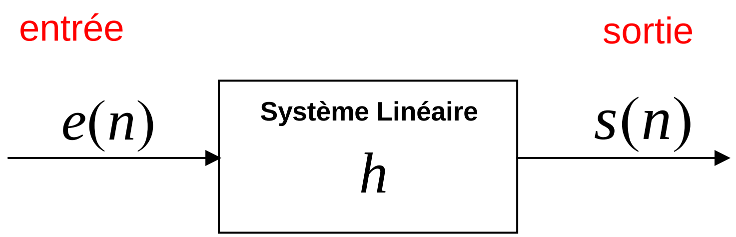


$$\vec{u}(4) = \begin{pmatrix} u(4) \\ u(3) \\ u(2) \end{pmatrix}$$

3.4. Système linéaire numérique

Définition

Un système linéaire numérique d'ordre K est un système qui transforme un signal numérique d'entrée en un signal numérique de sortie en effectuant à chaque instant d'échantillonnage une projection d'ordre K du signal d'entrée sur un signal de référence h



$$s(n) = \vec{e}(n) \cdot \vec{h}$$

3.4. Système linéaire numérique

On explicite l'opération de projection réalisée $s(n) = \vec{e}(n) \cdot \vec{h}$

ordre croissant des indices ↑

$$\vec{e}(n) = \begin{pmatrix} e(n) \\ e(n-1) \\ \dots \\ e(n-(K-1)) \end{pmatrix} \qquad \vec{h} = \begin{pmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \dots \\ h(K-1) \end{pmatrix}$$

↓ ordre croissant des indices

A chaque instant le système effectue l'opération $s(n) = \sum_{k=0}^{K-1} e(n-k)h(k)$

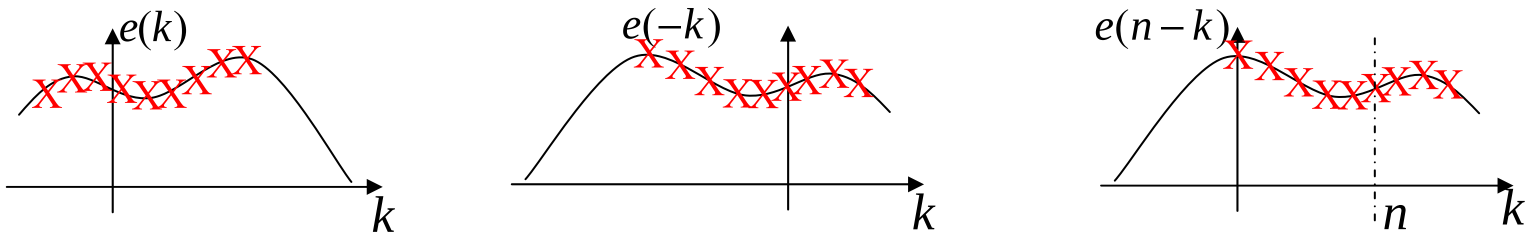
Et on note

$$\boxed{s(n) = e(n) \otimes h(n)}$$

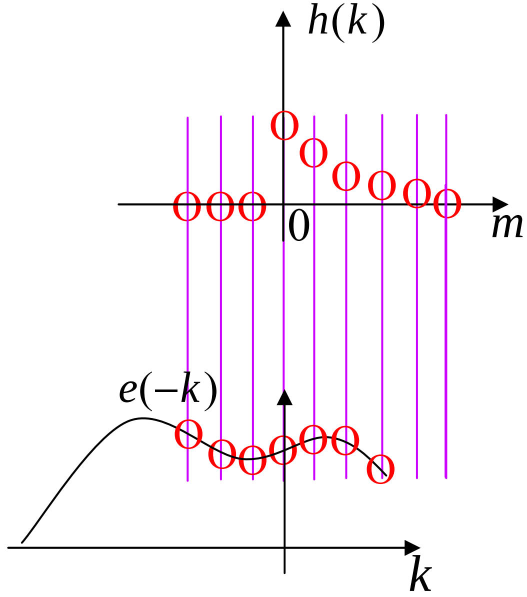
c'est le produit de convolution

3.5 Illustration du produit de convolution

$$s(n) = \sum_{k=0}^{K-1} e(n-k)h(k)$$

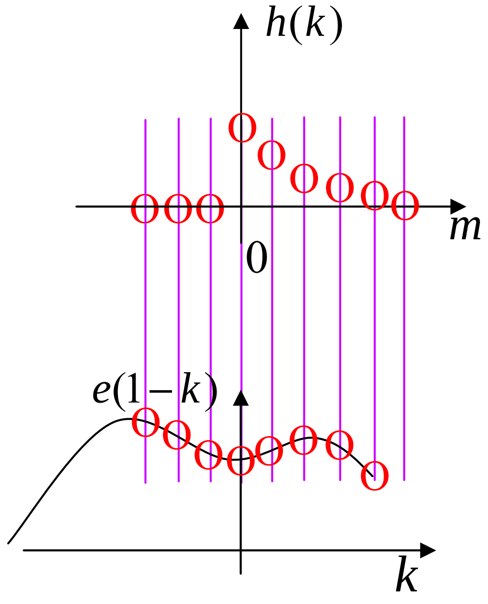


3.5 Illustration du produit de convolution



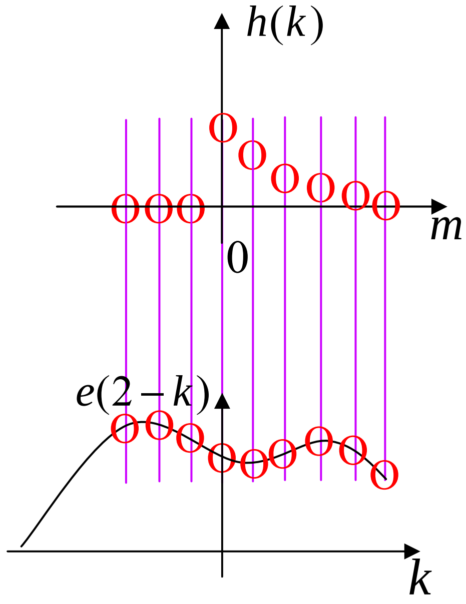
$s(0)$

3.5 Illustration du produit de convolution



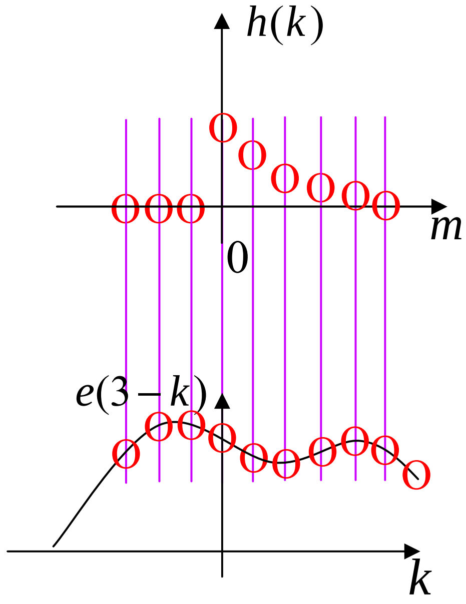
$s(1)$

3.5 Illustration du produit de convolution



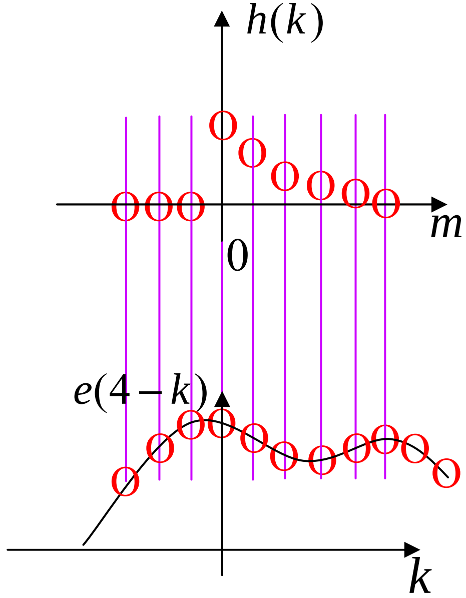
$s(2)$

3.5 Illustration du produit de convolution



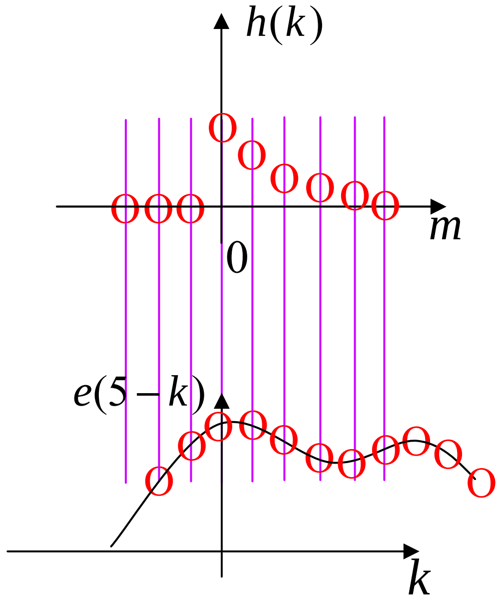
$s(3)$

3.5 Illustration du produit de convolution



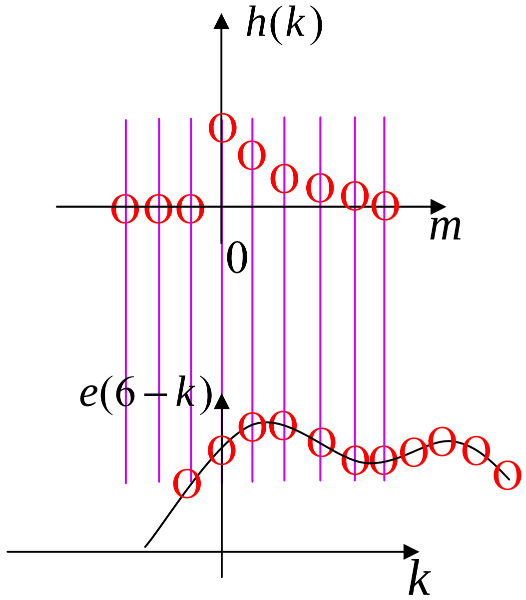
$s(4)$

3.5 Illustration du produit de convolution



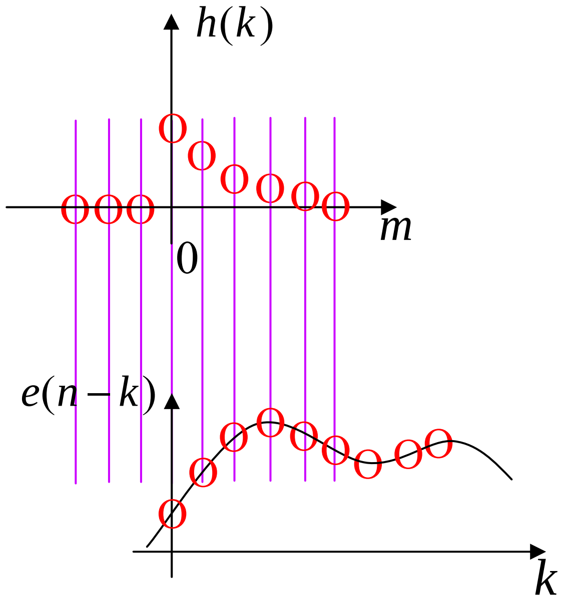
$s(5)$

3.5 Illustration du produit de convolution



$s(6)$

3.5 Illustration du produit de convolution

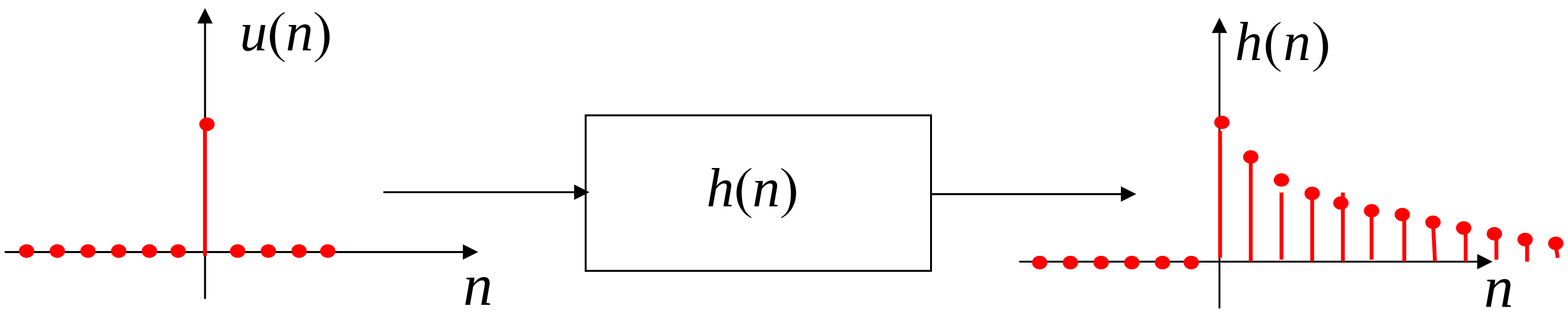


$s(n)$

3.6. Réponse impulsionnelle d'un système linéaire

Définition

> La réponse impulsionnelle est la sortie du Système Linéaire lorsque l'entrée est une impulsion unitaire en 0



3.7 Fonction de transfert d'un système linéaire

Définition

La fonction de transfert du système linéaire est la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle

$$H(z) = \sum_{k=0}^{K-1} h(k) z^{-k}$$

Propriété

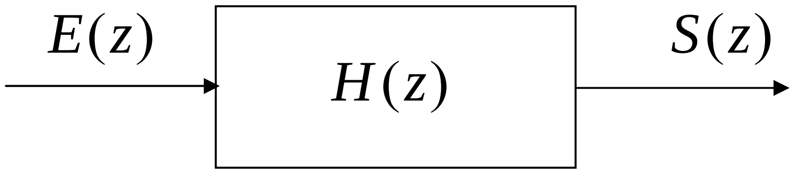
On montre que la transformée en Z du signal de sortie du système linéaire est le produit de la transformée en Z du signal d'entrée avec la fonction de transfert

$$S(z) = H(z) \times E(z)$$

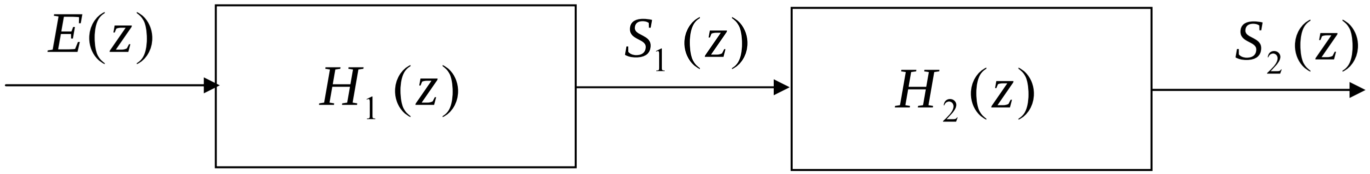
La transformée en Z du produit de convolution est le produit des transformées en Z

3.7 Fonction de transfert d'un système linéaire

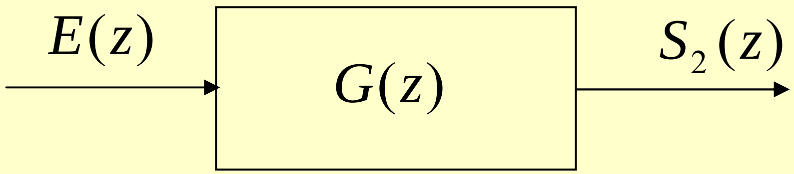
Représentation graphique



Mise en série de systèmes linéaires



$$S_2(z) = H_2(z)S_1(z) = H_2(z)H_1(z)E(z)$$



$$G(z) = H_1(z)H_2(z)$$

TP Séance 3

Exercice 1: filtre moyenneur d'ordre 1

Le filtre moyenneur d'ordre 1 est défini par la réponse impulsionnelle suivante

$$h(0) = \frac{1}{2} \qquad h(1) = \frac{1}{2}$$

Ecouter et afficher à l'écran le résultat du filtrage du signal

Utiliser la fonction Matlab

```
Signal_filtre = filter(h,1, signal)
```

```
h = [0.5, 0.5];
[piste, Fs, Nbits] = wavread('higelin.wav');
Duree = size(piste,1);
signal = piste(1:Duree,:);
sortie = filter(h,1,signal);
sound(sortie,Fs);
```

TP Séance 3

Exercice 2: filtre différentiateur d'ordre 1

Le filtre moyenneur d'ordre 1 est défini par la réponse impulsionnelle suivante

$$h(0) = \frac{1}{2} \qquad h(1) = \frac{-1}{2}$$

Ecouter et afficher à l'écran le résultat du filtrage du signal

Utiliser la fonction Matlab

```
Signal_filtre = filter(h,1, signal)
```

Quelle est la principale action du filtre sur le signal?

Visualiser la courbe de réponse en fréquence du filtre et confirmer la réponse précédente

Utiliser la fonction Matlab

```
freqz(h,1)
```